NGUYỄN THỊ HƯỜNG

Kiến thức cơ bản & nâng cao

Hình học 12

ĐHQG Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN THỊ HƯỜNG

KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

HÌNH HỌC

12

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GÍA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Các em học sinh thân mến!

Bước sang thế kỷ XXI, thế kỷ của sự "bùng nổ" thông tin, đã và đang mang lại cho chúng ta những kiến thức vô cùng phong phú trên tất cả các lĩnh vực khoa học tự nhiên cũng như xã hội. Điều đáng lưu ý là khối lượng kiến thức ngày càng nhiều đang mâu thuẫn với thời gian học tập có hạn của các em. Vì vậy, để khắc phục những mâu thuẫn trên, đồng thời làm tốt bài thi môn toán, các em cần có một vốn kiến thức vừa cơ bản, vừa bao quát toàn bộ chương trình.

Cuốn sách "**Hình học 12**", chúng tôi biên soạn dưới dạng vừa cung cấp những kiến thức cơ bản, vừa cung cấp những kiến thức nâng cao nhằm giúp các em ôn tập thi tốt nghiệp THPT và thi vào các trường Đại học, Cao đẳng khối A, B, D.

Cuốn sách "**Hình học 12**" gồm hai phần:

1. Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng (chương I)

2. Phương pháp tọa độ trong không gian (chương II)

Trong quá trình biên soạn, sẽ có những thiếu sót, chúng tôi mong nhận được sự góp ý chân thành từ các bạn đồng nghiệp và các em học sinh.

TÁC GIẢ

Chương I

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

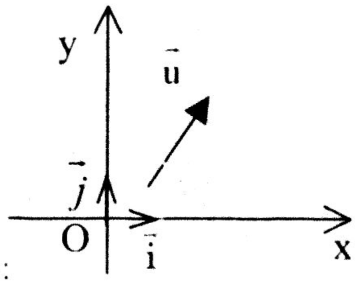
Vấn đề I

TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ CỦA ĐIỂM. PHƯƠNGTRÌNH ĐƯỜNG THẲNG. GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

A. Ghi nhớ

I. Tọa độ của vectơ và của điểm

1. Tọa độ của vectơ



* *Định nghĩa* :

$\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

* *Tính chất* :

cho $\vec{u} = (x; y)$, $\vec{v} = (x; y')$. Ta có các công thức sau:

a. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

b. $\vec{u} \pm \vec{u} = (x \pm x; y \pm y')$

c. $k\vec{u} = (kx; ky)$, với $k \in R$

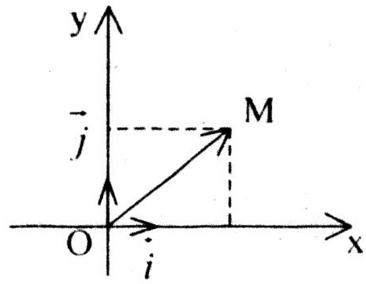
d. • $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'$; $\vec{u}^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

• $\vec{u} \neq \vec{0}$; $\vec{v} \neq \vec{0}$; $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

e. $\vec{u} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{u} = x.x' + y.y' = 0$

g. $\vec{u}$ cùng phương $\vec{u} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - yx' = 0$

2. Tọa độ của điểm



* *Định nghĩa* : $M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x;y)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

* *Tính chất : Cho* $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. *Khi đó ta có :*

a. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

b. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

c. Nếu M chia đoạn AB theo tỷ số $k \neq 1$ *(tức là* $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ *) thì tọa độ của*

M là: $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1 - k} \end{cases}, (k \neq 1)$

Hệ quả: Điểm I là trung điểm đoạn thẳng AB, ta có: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

* *Trọng tâm G của ΔABC có tọa độ là* $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

II. Phương trình của đường thẳng

1. Phương trình tổng quát của đường thẳng là

$Ax + By + C = 0$ (với $A^2 + B^2 \neq 0$)

2. Phương trình tham số của đường thẳng qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b)$ là: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ (1)

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b)$ là: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ (2)

* *Chú ý:* Một số dạng khác của phương trình đường thẳng :

1. Phương trình đường thẳng qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$ là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ (với $A^2 + B^2 \neq 0$)

2. Đường thẳng (Δ) qua $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ (với $a.b \neq 0$) có phương trình là $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

3. Phương trình đường thẳng qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và song song với đường thẳng (d) $Ax + By + C = 0$ là:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $(-Ax_0 - By_0 \neq C)$

4. Phương trình đường thẳng qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và vuông góc với đường thẳng (d) $Ax + By + C = 0$ là : $B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0$

5. Phương trình đường thẳng song song với đường thẳng

(d): $Ax + By + C = 0$ là : $Ax + By + C' = 0$; $(C' \neq C)$

6. Phương trình đường thẳng (Δ) vuông góc với đường thẳng

(d) $Ax + By + C = 0$ là : $Bx - Ay + C' = 0$

III. Khoảng cách

1. Khoảng cách từ một điểm $M_0(x_0; y_0)$ đến đường thẳng (Δ):

$Ax + By + C = 0$ là $d(M_0, \Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Đặc biệt : * $d(M_0, 0x) = |y_0|$

* $d(M_0, 0y) = |x_0|$

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm của đường thẳng này đến đường thẳng kia.

IV. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1(A_1;B_1)$ và $\vec{n}_2(A_2;B_2)$.Góc giữa hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) là φ với $0^0 \le \varphi \le 90^0$ và

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng 1: Tìm toạ độ điểm thoả mãn điều kiện cho trước:

Lưu ý các điểm đặc biệt trong tứ giác, tam giác (trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, đỉnh, trung điểm cạnh)...

Bài 1 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có $A(2; -3)$; $B(3; -2)$; diện tích $S = \frac{3}{2}$ và có trọng tâm G thuộc đường thẳng (Δ): $3x - y - 8 = 0$. Tìm tọa độ điểm G, C ?

Chú ý:

Phương pháp 1:

+ Tính tọa độ điểm $G(x_G; y_G)$ theo tọa độ điểm A, B, C $(x_C; y_C)$ và $G \in (\Delta)$ nên được hệ phương trình hai ẩn x_C, y_C.

+ Diện tích ΔABC là: $S = \frac{1}{2}AB.AC\sin A = \frac{1}{2}.\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

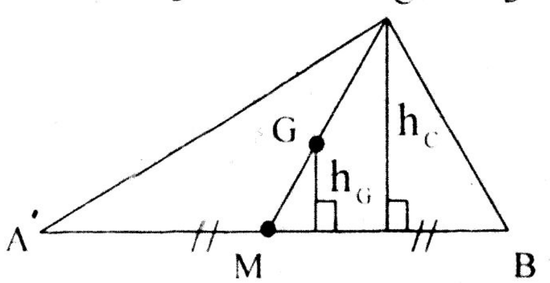
$= \frac{1}{2}AB.AC.\sqrt{1 - \cos^2(AB,AC)}$ khi đó ta có phương trình hai ẩn x_C, y_C. Do đó tìm được x_C, $y_C \Rightarrow x_G, y_G$

Phương pháp 2:

+ Ta có $h_c = 3h_G \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 3\, S_{\Delta ABG}$ và $S_{\Delta ABG} = \frac{1}{2}AB.\, d(G, AB)$, khi đó có hệ phương trình hai ẩn x_G; y_G

+ $G \in (\Delta)$ nên được phương trình hai ẩn x_G, y_G

+ Tính x_C từ $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$; $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$



Giải

Cách 1: Xét C $(x_C; y_C)$; G$(x_G; y_G)$.

Ta có : $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{5 + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{-5 + y_C}{3} \end{cases}$

Mặt khác, điểm $G(x_G; y_G) \in (\Delta)$ nên ta có: $3x_G - y_G - 8 = 0$

$$\Rightarrow 3\,\frac{5 + x_C}{3} - \frac{-5 + y_C}{3} - 8 = 0 \Rightarrow y_C = 3x_C - 4 \qquad (1)$$

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC\sin A$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$ Với $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1;1) \\ \overrightarrow{AC} = (x_C - 2; y_C + 3) \end{cases}$

$= \dfrac{1}{2}\left|y_C + 3 - (x_C - 2)\right|$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left|y_C + 3 - (x_C - 2)\right| \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được : $\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}\left|(3x_C - 4) + 3 - (x_C - 2)\right| \Leftrightarrow \left|2x_C + 1\right| = 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_C = 1 \\ x_C = -2 \end{array}\right.$$

* Với $x_C = 1$; từ (1) ta có : $y_C = -1 \Rightarrow C(1; -1)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = -2 \end{cases} \Rightarrow G(2; -2)$

* Với $x_C = -2$; từ (1) ta có : $y_C = -10 \Rightarrow C(-2; -10)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = -5 \end{cases} \Rightarrow G(1; -5)$

Vậy C $(1; -1)$; G$(2; -2)$ hay C $(-2; -10)$; G$(1; -5)$

Cách 2: Ta có $S_{\Delta ABC} = 3\,S_{\Delta ABG}$ và $S_{\Delta ABG} = \dfrac{1}{2}AB.\,d(G,AB)$

$\Rightarrow \dfrac{3}{2} = 3.\,\dfrac{1}{2}AB.\,d(G,AB)$ (*). với $AB = \sqrt{2}$

Đường thẳng AB qua A(2; –3) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1;\ 1)$ nên

ıg thẳng AB có phương trình là : $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{1} \Leftrightarrow x - y - 5 = 0$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \frac{3}{2} = 3.\frac{1}{2}.\sqrt{2}.\frac{|x_G - y_G - 5|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |x_G - y_G - 5| = 1$ (3)

Điểm $G(x_G; y_G) \in (\Delta)$ nên ta có :

$3x_G - y_G - 8 = 0 \Leftrightarrow y_G = 3x_G - 8$ (4)

Thay (4) vào (3) ta được : $|x_G - (3x_G - 8) - 5| = 1 \Leftrightarrow |3 - 2x_G| = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_G = 1 \\ x_G = 2 \end{array}\right.$$

* Với $x_G = 1$; từ (4) ta có: $y_G = -5 \Rightarrow G(1; -5)$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{5 + x_C}{3} \\ -5 = \dfrac{-5 + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = -2 \\ y_C = -10 \end{cases} \Rightarrow C(-2; -10)$$

* Với $x_G = 2$; từ (4) ta có : $y_G = -2 \Rightarrow G(2; -2)$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{5 + x_C}{3} \\ -2 = \dfrac{-5 + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -1 \end{cases} \Rightarrow C(1; -1)$$

Vậy C (1; –1) ; G(2; –2) hay C (–2; –10) ; G(1; –5)

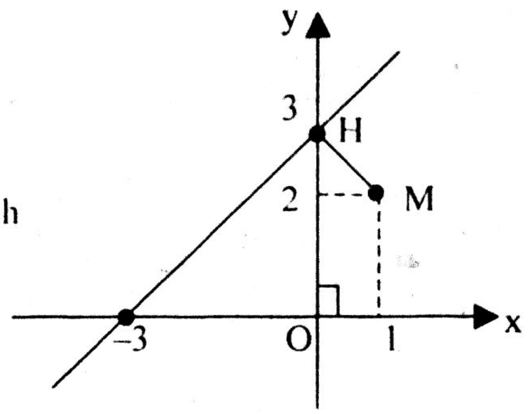
Bài 2: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy tìm hình chiếu vuông góc của M(1; 2) trên đường thẳng (Δ): x – y + 3 = 0.

Giải

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (Δ)

$\Rightarrow$ Đường thẳng MH qua M(1; 2) và $MH \perp (\Delta)$

$\Rightarrow$ Đường thẳng MH qua M(1; 2) và nhận vectơ $\vec{n}(1; -1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình:



$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1}$$

$\Rightarrow (x-1) + (y-2) = 0 \Rightarrow x + y - 3 = 0$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow H(0; 3)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (Δ)

$\Rightarrow H \in (\Delta) \Rightarrow H(a; a + 3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MH} = (a - 1; a + 1)$

Ta có $\vec{u} = (1;1)$ là một vectơ chỉ phương của (Δ).

Mặt khác ta có $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} = (a-1)+(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0$

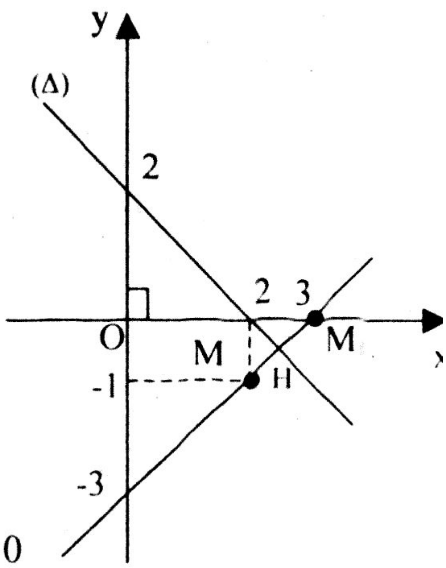
$\Rightarrow H(0;3)$

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy tìm điểm đối xứng của M(2; −1) qua đường thẳng (Δ): $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$

Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (Δ)

Tìm tọa độ điểm H:



Cách 1: Đường thẳng (Δ) có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;-1)$

Đường thẳng MH qua M(2; −1) và MH ⊥ (Δ)

⇒ Đường thẳng MH qua M(2; −1) và nhận $\vec{u}(1;-1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $(x-2)-(y+1)=0 \Rightarrow x-y-3=0$

⇒ Tọa độ điểm H là cặp (x; y) thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ x=1+t; y=1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+t)-(1-t)-3=0 \\ x=1+t; y=1-t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t=3 \\ x=1+t; y=1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{5}{2}; y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(\frac{5}{2};-\frac{1}{2})$$

Cách 2: $H \in (\Delta) \Rightarrow H(1+t; 1-t)$

Ta có $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u} = (1;-1)$ ($\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ))

$\Rightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0$ với $\overrightarrow{MH} = (t-1; 2-t)$

$$\Rightarrow (t-1)-(2-t)=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2} \Rightarrow H(\frac{5}{2};-\frac{1}{2})$$

Gọi $M_1(x_1; y_1)$ là điểm đối xứng của M qua (Δ) ⇒ H là trung điểm đoạn MM_1

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{x_M + x_{M_1}}{2} \\ y_H = \dfrac{y_M + y_{M_1}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M_1} = 2x_H - x_M = 5 - 2 = 3 \\ y_{M_1} = 2y_H - y_M = -1 - (-1) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow M_1(3; 0)$ là điểm đối xứng của M qua (Δ).

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có $A(1; -1)$; $B(5; -3)$; C thuộc trục tung Oy và trọng tâm G thuộc trục hoành Ox. Tìm tọa độ điểm C; G?

Giải

Ta có C thuộc trục tung Oy và trọng tâm G thuộc trục hoành Ox

$\Rightarrow C(0; y_C)$; $G(x_G; 0)$

Mặt khác ta có $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{6}{3} \\ 0 = \dfrac{-4 + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_C = 4 \end{cases}$.

$\Rightarrow C(0; 4)$; $G(2; 0)$

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có trọng tâm $G(-2; -1)$, cạnh AB nằm trên đường thẳng (Δ): $4x + y + 15 = 0$ và cạnh AC nằm trên đường thẳng (D): $2x + 5y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A; B; C?

Giải

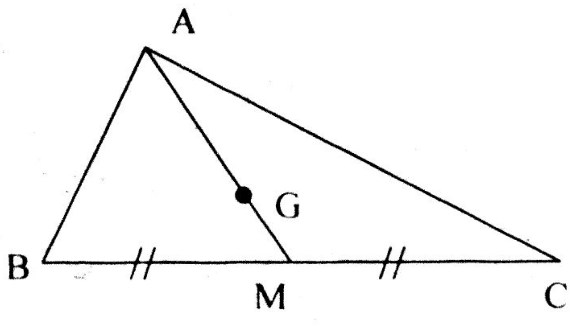
Cách 1: Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + y + 15 = 0 \\ 2x + 5y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $A(-4; 1)$

$M(x_M; y_M)$ là trung điểm cạnh BC, ta có:

$$\overline{GA} = -2\overline{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + 2x_M}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + 2y_M}{3} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{3x_G - x_A}{2} = -1 \\ y_M = \dfrac{3y_G - y_A}{2} = -2 \end{cases}$$

Vậy $M(-1, -2)$

Ta có: $B(x_B; y_B) \in (\Delta)$: $4x + y + 15 = 0 \Leftrightarrow 4x_B + y_B + 15 = 0$ (1)

Ta có: $C(x_C; y_C) \in (D)$: $2x + 5y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x_C + 5y_C + 3 = 0$ (2)